تمرين1

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و $n \in IN^*$. نعتبر الحدودية P_n المعرفة ب: $P_n(x) = (\sum_{k=1}^{n} x^k) - a$

بين أن المعادلة $P_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا موجبا x_n ثم بين أن $0 \prec x_n \leq a$

أدرس إشارة $P_{n+1}(x_n)$ ثم استنتج رتابة المتتالية (x_n)

بين أن (x_n) متقاربة نضع : $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ بين أن : $0 \leq l \prec 1$

بين أن x_n حل للمعادلة : $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$ ثم استنتج أن : $l = \frac{a}{a+1}$

تمرين2

$n \in IN^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة ب: $f_{n+1}(x) = x^n + 9x^2 - 4$

بين أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا u_n وحيدا على IR^{+*}

أحسب u_1 و u_2 ثم بين أن : $\forall n \in IN^* : u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$

بين أن : $\forall n \in IN^*; \forall x \in]0,1[: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

أدرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

نضع : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ حدد $\lim_{n \to +\infty} (u_n)^n$ ثم حدد l

تمرين3

نضع لكل $n \geq 2$: $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ و $u_1 = 1$

بين ان : $\forall n \geq 2; \forall k \in \{1,...,n-1\} : \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+1} - \frac{2}{3}k\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$

استنتج أن : $\forall n \geq 2 : u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}$

استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

تمرين4

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب: $\forall n \geq 1; v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{1+k^2}$

بين أن : $\forall n \geq 1 : n - Arc\tan(n+1) + \frac{\pi}{4} \leq v_n - \frac{1}{2} + \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^2}$ ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} v_n$

تمرين 5

f دالة متصلة على المجال $[1,2]$ و ق ش على المجال $]1,2[$ بحيث: $f(2) = f(1) + \frac{\pi}{4}$

بين ان : $\exists c \in]1,2[\,/\, f'(c) = \frac{1}{2c\sqrt{c-1}}$